Ответы к заданиям олимпиады по математике

2019/2020 учебный год

**8 класс**

1. Решение.

 (х - у)(х + у) = 2019.

 Откуда х = 1010, у = 1009.

1. Решение.
Три возможных ответа изображены на рисунке 1.
Можно показать, что других конфигураций из пяти прямых, пересекающихся ровно в семи различных точках, нет.



1. Решение.
Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним (одну использовал и одну получил от отца).
Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2 (одну использовал и одну отобрал отец).
Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10 : 2 = 5 раз, стало быть, попал 55 – 5 = 50 раз.
2. Решение. Разделим монеты на три кучки по 27 монет. Взвесим первую и вторую кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета в той кучке, которая легче. После этого разбиваем кучку из 27 монет (в которой есть фальшивая монета) на три кучки по 9 монет и вторым взвешиванием определяем более легкую кучку. Третьим взвешиванием определяем наиболее легкую тройку монет. И, наконец, четвертым взвешиванием определяем фальшивую искомую монету.
3. Решение.
Пусть биссектрисы *AA*1 и *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *I*(рис.2).
Допустим, что *AIC*1 = 60°. По теореме о внешнем угле треугольника

откуда*BAC*+ *BCA* = 120° и *ABC* = 180°– *BAC* – *BCA* = 60°. Но это еще не все решение: ведь может случиться, что *AIC* = 60°. Однако тогда *IAC* + *ICA* = 120°,откуда*BAC* + *BCA* = 240°,что невозможно.

**9 класс**

1. Решение.



Если, а = 2019, то 1 – а = 1- 2019 = -2018.

Ответ: –2018.

1. Решение.
По условию3м + 4с + 2в > 2м + 3с + 4в, откуда м + с > 2в. (\*)

По условию же 3м + 4с + 2в > 4м + 2с + 3в, откуда 2с > м + в.

Складывая последнее неравенство с неравенством (\*), получаем

 м + 3с > м + 3в, откуда с > в.

1. *Решение:* Пусть *a* – первоначальный вес Обломова, тогда его вес через год будет равен

*a* ⋅ 0,75 ⋅ 1,2 ⋅ 0,9 ⋅ 1,2 = 0,972 *a*, что меньше чем *a*. Таким образом, Обломов похудел.

*Ответ:* Обломов похудел.

1. *Решение*



Имеем, *S*Δ*ADK = S*Δ*ALK*, так как они имеют общее основание AK и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми *AB* и *DC*. *S*Δ*ADE = S*Δ*ADK – S*Δ*AEK = S*Δ*ALK – S*Δ*AEK = S*Δ*KLE.* Аналогично, *S*Δ*BCF = S*Δ*KLF*. Таким образом, сумма площадей треугольников Δ*ADE* и Δ*BCF* равна площади четырёхугольника *EKFL*.

1. Решение.

Покажем, что подойдет раскраска клеток доски в шахматном порядке. Заметим, что сумма данного числа и его соседей по диагоналям равна сумме соседей этого числа по сторонам: обе суммы втрое больше данного числа.
Поэтому в квадрате 2 х 2, находящемся в углу доски, суммы чисел в красных и синих клетках совпадают: обе они втрое больше числа, стоящего в угловой клетке доски. Также совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого прямоугольника 3 х 2, примыкающего длинной стороной к краю доски: обе они втрое больше числа, стоящего в средней клетке стороны, примыкающей к краю доски. Наконец, совпадают суммы чисел в красных и синих клетках любого квадрата 3 х 3:
обе они втрое больше числа, стоящего в центре квадрата. Разобьем доску 50 х 50 на квадрат 48 х 48, квадрат 2 х 2 и два прямоугольника 2 х 48, как показано на рисунке 3. Квадрат 48 х 48 разобьем на квадраты 3 х 3, а прямоугольники 2 х 48 — на прямоугольники 3 х 2, примыкающие длинной стороной к краю доски. В каждом из этих квадратов и прямоугольников суммы чисел, стоящих в красных и синих клетках, равны.
Значит, они равны и на всей доске.

**10 класс**

1. Решение. 1019 -1 = 100… - 1= 999…999, оно состоит из 18-ти девяток и делится на 9. 102019 +1 = 1000… + 1 = 100…001, сумма всех его цифр равна 2 и на 9 не делится. То есть, деление нацело невозможно.
2. Решение.

Уравнение x4 – 4x3 + 12x2 – 24x + 24 = 0  преобразовать к виду (x2 – 2x)2 + 8(x – 1,5)2 + 6 = 0, которое не имеет решений.

1. Решение. Проведем биссектрису *AD*. Тогда ∠1 = ∠2 = ∠3. В Δ*ADC AD = DC*. Пусть *АВ* = *х*, *AD = DC = y*, тогда *ВС = х* + 2, *BD = x* + 2 – *y*. Заметим, что Δ*ABD* ~Δ*ABC* по двум углам *(*∠*В* – общий, ∠1 = ∠3).

*2*

*3*

*А*

*С*

*В*

*D*

*1*

Из подобия имеем: ,

или .

Для нахождения *х* и *у* получим систему уравнений:



Вычитая из первого уравнения второе, получим  откуда , тогда  значит *АВ* = 4*см*, *ВС* = 6*см*.

*II способ.* Указание: применить теорему синусов.

Ответ. *AB* = 4*см*, *ВС* = 6*см*.

1. Решение.
2. 
3. 

Ответ: 0 < x < 1.

5.Решение.

1 + 2 + 4 + 8 + … + 2*n* = 65535 – это сумма геометрической прогрессии, где *а1* = 1, *а2* = 2, и т.д. Таким образом, *q* = 2. Формула суммы геометрической прогрессии 



**11 класс**

1. Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось (x+1)(y−1) = xy+y−x−1. Произведение увеличилось на 2019, то есть y −x−1 = 2019 или y−x = 2018. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится (x−1)(y+1) = xy−y+x−1. Заметим, что xy−y+x−1 = xy−(y−x)−1 = xy−2018−1 = xy−2019. То есть произведение уменьшилось на 2019.
2. Решение. Вырежем из арбуза длинный тонкий цилиндр, протыкающий арбуз насквозь. Это одна из частей, от которой останется две корки. Остальную часть арбуза произвольным образом разрежем на три части, каждая из которых дает по одной корке.
3. Решение. Пусть это 4 последовательных числа: n, n + 1, n + 2, n +3.

Тогда n (n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n 2   + 3n)(n2 + 3n + 2) + 1 = (n2  + 3n)2+ 2(n2  + 3n) + 1 = (n2  + 3n + 1)2.

1. Решение. Пусть сторона квадрата –  тогда   , . В равнобедренном треугольнике по теореме косинусов найдем косинус угла ACB. .

Следовательно, 

Ответ: 

1. Решение. Поскольку  то



 имеем:

